TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Mario Pérez y Adelina Ocaña
Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
mario.perez@utadeo.edu.co, adelina.ocana@utadeo.edu.co

El cursillo que presentamos va dirigido a profesores de educación media y primeros niveles universitarios. En él se proponen actividades que buscan establecer conexiones entre las transformaciones de funciones y las transformaciones geométricas. Consideramos que estas actividades pueden contribuir a enriquecer el concepto de función en el nivel de objeto (categoría de la teoría APOS) al trabajar las funciones como elementos de conjuntos particulares (familias de funciones); también se puede enriquecer el concepto de transformación geométrica, ya que no se limita a las transformaciones euclídeas.

PRIMERA SESIÓN

1) Se revisan los conceptos de *transformación de funciones* y de *transformación geométrica* (Breidenbach, 1992):

- Transformación (T) de funciones: función cuyo dominio y rango son funciones (consideramos las que tienen como dominio y rango, subconjuntos de números reales): T: $f \to g$.
- Transformación geométrica τ*:* función uno a uno del plano ($\mathbb{R}^2$) en sí mismo: τ: $(x, y) \to (x', y')$ (Eccles, 1971).

Se presentan algunos ejemplos.

2) Las transformaciones de funciones en las que se centrará la atención son las de la forma $T(f(x)) = A f(B(x + C)) + D$ y las de la forma $T(f(x)) = |f(x)|$; $T(f(x)) = f(|x|)$.

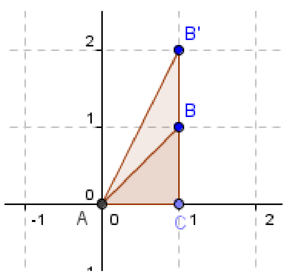
3) Se pueden establecer conexiones entre algunas de las transformaciones (Stewart, 2007) de la forma $T(f(x)) = A f(B(x + C)) + D$ y las transformaciones geométricas euclídeas, de manera "natural", como se aprecia en los siguientes ejemplos:

Pérez, M. y Ocaña, A. (2011). Transformaciones de funciones y transformaciones geométricas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 449-452). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Transformación	Descripción verbal	Transformación geométrica	Descripción
$g(x) = f(x + 2)$	Desplaza la gráfica de f dos unidades a la izquierda	$\tau(x, y) = (x - 2, y)$ (euclídea)	Desplaza los puntos del plano dos unidades a la izquierda
$g(x) = -f(x)$	Refleja la gráfica en el eje x	$\tau(x, y) = (x, -y)$ (euclídea)	Refleja los puntos del plano en el eje x

4) A una transformación que hace estiramiento en dirección vertical, como por ejemplo $T(f(x)) = 2f(x)$, le corresponde de manera natural la transformación geométrica.

$\tau(x, y) = (x, 2y)$. Observemos el efecto que tiene en un triángulo como el de la Figura 1:



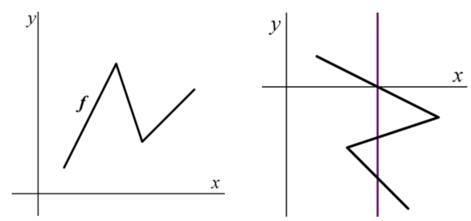


Figura 1

Figura 2

Podemos advertir que esta transformación geométrica no preserva la distancia ni la medida angular y por tanto no es una transformación euclídea.

5) No se han mencionado hasta ahora transformaciones a las que se les haga corresponder rotaciones u homotecias. Examinemos las rotaciones. Si la gráfica de una función se rota puede suceder que la obtenida no sea la gráfica de una función como se aprecia en la gráfica de la Figura 2, utilizando el criterio de la recta vertical.

6) El efecto que produce una homotecia como $\tau(x, y) = (2x, 2y)$ puede conseguirse en las gráficas de funciones con la composición de un estiramiento vertical y un estiramiento horizontal:

$$T(f(x)) = 2f(\tfrac{1}{2}x)$$

Si partimos de las transformaciones geométricas podemos entonces concluir, con los ejemplos anteriores, que hay algunas que envían gráficas de funciones en gráficas de funciones. De las transformaciones geométricas que tienen esa propiedad diremos que *conservan la funcionalidad*.

SEGUNDA SESIÓN

1) Tanto la composición de transformaciones de funciones como de transformaciones geométricas son operaciones asociativas pero no conmutativas. Se examina por ejemplo el orden en que se pueden realizar transformaciones como:

$T_1(f(x)) = -2f(x-3)+1$; $T_2(f(x)) = -2f(-x-3)+1$; tomando a f como: $f(x) = x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = \sqrt{x}$

2) Se determina los posibles órdenes en que se puede realizar las transformaciones de la forma $T(f(x)) = Af(B(x+C))+D$, para cualquier función f, con su correspondiente contraparte geométrica.

3) Se examina qué transformaciones de la forma $T(f(x)) = Af(B(x+C))+D$ aplicadas a las siguientes familias particulares de funciones las transforma en funciones de la misma familia (con su correspondiente contraparte geométrica).

a) $\{f(x) = mx,\ m \text{ constante}\}$
b) $\{f(x) = mx+b,\ m \text{ constante}\}$
c) $\{f(x) = ax^2\}$
d) Funciones polinómicas
e) Funciones racionales
f) $\{f(x) = b \cdot a^x\}$
g) $\{f(x) = a \cdot \log x\}$
h) $\{f(x) = a \cdot \sin x\}$

El caso de las funciones exponenciales es llamativo: si éstas se definen como funciones de la forma $f(x) = b \cdot a^x$, para $b \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, *entonces una traslación vertical como* $T(f(x)) = f(x)+1$ envía a la función $f(x) = 2^x$ en la función $g(x) = 2^x + 1$ la cual no es expresable en la forma $f(x) = b \cdot a^x$. Algunos textos (e.g., Stewart, 2007) pasan esto por alto y la siguen llamando función exponencial.

Con transformaciones $T(f(x)) = Af(B(x+C))+D$ se puede conseguir cualquier función lineal a partir de la función potencia $f(x) = x$; también puede conseguirse cualquier función cuadrática a partir de la función potencia $f(x) = x^2$. Podría pensarse que esto mismo sucede para el caso de las funciones cúbicas con la función potencia $f(x) = x^3$. Pero esto no es cierto; por ejemplo la función $g(x) = x^3 - x$ no puede escribirse en la forma $g(x) = A f(B(x + C)) = A (B(x + C))^3 + D$ pues si C es diferente de cero, en el desarrollo del cubo del binomio aparece un elemento cuadrático y si C es cero entonces no hay elemento lineal. Geométricamente se expresa esto diciendo que las transformaciones geométricas de traslación, reflexión y estiramiento o compresión vertical u horizontal no permiten transformar la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en la gráfica de la función $g(x) = x^3 - x$

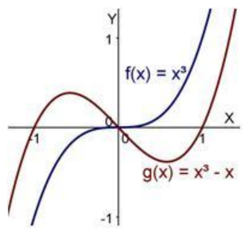


Figura 3

4) ¿Qué tipo de transformación geométrica permite transformar la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en la gráfica de la función $g(x) = x^3 - x$? La respuesta se obtiene con las cizalladuras: $T(x, y) = (x + a, v\, x + y + b)$, tomando $a = 0$ $v = -1$, $y = f(x)$, $b = 0$. Lo anterior puede apreciarse visualmente con la manipulación de herramientas como el deslizador en GeoGebra o en Cabri.

5) Se examinan situaciones similares en familias de funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, sinusoidales.

Se hacen las descripciones correspondientes a los efectos que producen en las gráficas de funciones las transformaciones de la forma $T(f(x)) = |f(x)|$; $T(f(x)) = f(|x|)$. Se examina si las extensiones correspondiente a los puntos del plano determinan o no transformaciones geométricas.

REFERENCIAS

Breidenbach, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 247-285.

Eccles, F. (1971). *An introduction to transformational geometry*. Philippines: Addison-Wesley.

Stewart, J. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México: Thomson Learning.